

DOI 10.33952/2542-0720-2020-3-23-152-167

УДК 631.43+004.65

Терлеев В. В.<sup>1</sup>, Дунаева Е. А.<sup>2</sup>, Гиневский Р. С.<sup>1</sup>, Лазарев В. А.<sup>1</sup>, Топаж А. Г.<sup>3</sup>**ГИСТЕРЕЗИС ВОДОУДЕРЖИВАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПОЧВЫ:  
СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ НА ПРИМЕРЕ ПЫЛЕВАТОГО СУГЛИНКА**<sup>1</sup> ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»;<sup>2</sup> ФГБУН «Научно-исследовательский институт сельского хозяйства Крыма»;<sup>3</sup> ООО «Бюро Гиперборей»

**Реферат.** Актуальность исследования определяется теоретической ценностью и практическим значением моделей гистерезиса водоудерживающей способности почвы в качестве интеллектуального ядра технологий точного ирригационного земледелия. Цель исследований – физическое обоснование гистерезиса водоудерживающей способности почвы как капиллярно-пористой среды, описание этого феномена с использованием метода математического моделирования и верификация предлагаемого описания в сравнении с наиболее известными мировыми аналогами. Задачи исследования: теоретическое обоснование и описание водоудерживающей способности почвы с учетом гистерезиса в виде трех систем гидрофизических функций; сравнение этих систем на основе погрешностей оценок сканирующих ветвей гистерезиса с использованием параметров, идентифицированных путем точечной аппроксимации данных из литературы о главных ветвях иссушения и увлажнения водоудерживающей способности пылеватого суглинка «3301 Carieol silt loam», с применением критерия Вильямса-Клута; исследование условия равенства значений экспоненциального параметра  $n_d = n_w$ , для ветвей иссушения и увлажнения, устраняющего нежелательный искусственный «эффект помпы», а также использования аддитивного параметра  $\psi_e$  в отношении влияния на погрешности оценок. При проведении исследования используется компьютерная программа SoilHysteresis-v.1.0. В отношении пылеватого суглинка условие  $n_d = n_w$  является эффективным; использование аддитивного параметра  $\psi_e$  приводит к достоверному уменьшению погрешностей точечной аппроксимации данных о главных ветвях и погрешностей оценок сканирующих ветвей гистерезиса водоудерживающей способности, в том числе для решения проблем точного ирригационного земледелия, таких как расчет прецизионных норм орошения.

**Ключевые слова:** математическая модель, главная и сканирующая ветви гистерезиса, точечная аппроксимация опытных данных, оценивание, «эффект помпы».

**Введение**

К числу важнейших гидрофизических свойств почвы относится ее водоудерживающая способность. При описании этого свойства используется зависимость эффективного влагонасыщения  $S_e$  от капиллярного давления (капиллярно-сорбционного потенциала) влаги  $\psi$  [см H<sub>2</sub>O] ( $\psi$  имеет отрицательные значения в почвах, не насыщенных водой). Для оценки степени насыщения почвы водой используется показатель эффективного влагонасыщения  $S_e = (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)$ ; здесь  $\theta$  [см<sup>3</sup>·см<sup>-3</sup>] – объемная влажность;  $\theta_s$  [см<sup>3</sup>·см<sup>-3</sup>] – объемная влажность насыщения;  $\theta_r$  [см<sup>3</sup>·см<sup>-3</sup>] – объемная остаточная влажность. В качестве приближенных оценок значений величин  $\theta_s$  и  $\theta_r$  могут соответственно использоваться пористость и максимальная гигроскопичность почвы.

Водоудерживающая способность почвы, описываемая зависимостью  $S_e(\psi)$ , является гистерезисным свойством. Причинами гистерезиса являются: во-первых,

различие между значением  $\psi$  при начальном иссушении исходно полностью насыщенной влагой почвы («давление входа воздуха») и значением  $\psi$  на завершающей стадии увлажнения почвы (давление вытеснения заземленного воздуха из тупиковых пор, или «давление входа воды»); во-вторых, непостоянство площади поперечного сечения поры вдоль ее продольной оси («эффект четок»). В литературе в качестве третьей причины гистерезиса нередко отмечают различие между краевыми углами смачивания поверхности твердой фазы при иссушении и увлажнении почвы. Действительно, краевые углы смачивания могут отличаться в процессах иссушения и увлажнения почвы. Однако гистерезис является феноменом равновесных состояний, а не процессов. Поэтому при описании гистерезиса третью причину авторы данной публикации не принимают в расчет.

Учет первой и второй причин означает, что главные и сканирующие ветви иссушения и увлажнения гистерезиса водоудерживающей способности почвы описываются соответствующими зависимостями  $S_e(\psi)$ . Для почв, не набухающих при увлажнении, главная петля гистерезиса, образованная двумя главными ветвями, по физическому смыслу должна быть замкнутой, поскольку: во-первых, для ветвей иссушения и увлажнения значение  $\theta_s$  должно быть одним и тем же (так как пористость остается неизменной); во-вторых, для ветвей иссушения и увлажнения значение  $\theta_r$  должно быть одним и тем же (так как максимальная гигроскопичность также остается неизменной). Сканирующая ветвь не может выходить за пределы физически допустимой области, ограниченной главными ветвями гистерезиса, также она может начинаться, но не может заканчиваться на главной ветви. В отличие от представлений, изложенных в [1], по мнению авторов настоящей статьи, в каждой точке любой ветви гистерезиса функция приведенной дифференциальной влагоемкости почвы  $dS_e/d\psi$  должна принимать только два значения: одно – для иссушения, другое – для увлажнения почвы; при этом пересекаться могут только две соседние (в отношении последовательной очередности) сканирующие ветви, в иных случаях функция  $dS_e/d\psi$  в точке пересечения будет принимать неограниченное количество значений, что представляется физически абсурдным. Вместе с тем, допустимо, что между двумя точками пересечения двух соседних в последовательной очередности сканирующих ветвей образуется замкнутая петля.

Данные о сканирующих ветвях увлажнения необходимы для решения весьма актуальных проблем гидротехнического строительства [2, 3], а также точного земледелия. К числу таких проблем относится расчет прецизионных норм орошения [4]. Начальная точка сканирующей ветви увлажнения находится в конце предыдущей ветви иссушения водоудерживающей способности и описывается определенной парой значений величин  $S_e$  и  $\psi$ , которые соответствуют предполивному запасу воды в почве. Конечная точка сканирующей ветви увлажнения описывается другой парой значений величин  $S_e$  и  $\psi$ , которые соответствуют влагозапасу почвы, аккумулируемому в условиях полива. Измерения сканирующих ветвей гистерезиса  $S_e(\psi)$  являются достаточно трудоемкими. Поэтому в ирригационном земледелии до сих пор широко практикуют методику расчета норм орошения по разности между наименьшей влагоемкостью (НВ) и предполивым влагозапасом почвы [5]; при этом НВ обычно определяется главной ветвью иссушения  $S_e(\psi)$ . Такая норма почти всегда оказывается завышенной. Завышение нормы, вычисленной по данной методике, обусловлено следующей причиной. Значение эффективного влагонасыщения почвы, соответствующее критическому значению  $\psi$ , при котором почва способна удерживать наибольший запас воды, и определяющее значение НВ, является максимальным на главной ветви иссушения почвы. Такое значение НВ почвы предлагается называть

«потенциальным». На всех других ветвях петли гистерезиса значения  $S_e$ , соответствующие отмеченному критическому значению  $\psi$ , и также определяющие другие значения НВ, являются более низкими. Такие значения НВ предлагается называть «эффективными». Значение НВ при  $\psi = -330$  см вод. ст. предлагается называть «нормативным». Для расчета прецизионных норм орошения следует использовать не «потенциальное» – максимально возможное значение НВ, а «эффективные» значения НВ, которые соответствуют более низким значениям эффективного влагонасыщения почвы на сканирующих ветвях увлажнения гистерезиса  $S_e(\psi)$ . Попутно отметим, что «эффективные» значения НВ могут быть приближенно оценены по точкам пересечения ветвей гистерезиса  $S_e(\psi)$  с соответствующей эмпирической кривой, которую называют «секущая» Воронина [6].

Наряду с достаточно высокой трудоемкостью измерения сканирующих ветвей гистерезиса  $S_e(\psi)$ , о чем упомянуто выше, имеет место и другое весьма существенное затруднение, которое заключается в том, что из-за непредсказуемого характера выпадения атмосферных осадков в предстоящем вегетационном периоде (для условий сельскохозяйственного поля) заранее невозможно предсказать, данные о каких сканирующих ветвях понадобятся для расчета прецизионных норм орошения, а заблаговременно измерить исчерпывающий набор сканирующих ветвей не представляется возможным в принципе. По этой причине исследования, направленные на разработку физически обоснованной математической модели гистерезиса  $S_e(\psi)$ , являются весьма актуальными, а применение такой модели для расчета прецизионных норм орошения, по сути, не имеет альтернативы [7].

**Цель исследования** – физическое обоснованное описание гистерезиса водоудерживающей способности почвы как капиллярно-пористой среды с использованием метода математического моделирования, верификация предлагаемого описания в сравнении с наиболее известными мировыми аналогами.

Задачи, поставленные для достижения цели:

- 1) физическое обоснование и функциональное описание водоудерживающей способности почвы с учетом двух причин гистерезиса  $S_e(\psi)$ ;
- 2) идентификация параметров сравниваемых функций  $S_e(\psi)$  путем точечной аппроксимации данных о главных ветвях иссушения и увлажнения водоудерживающей способности почвы из литературы [8] и выявление различий между погрешностями аппроксимации с применением критерия Вильямса-Клута [9];
- 3) верификация сравниваемых функций  $S_e(\psi)$  путем оценивания сканирующих ветвей иссушения и увлажнения водоудерживающей способности почвы с использованием параметров, идентифицированных по данным о главных ветвях гистерезиса, выявление различий между погрешностями оценок по критерию Вильямса-Клута и выбор лучшей физически обоснованной модели.

#### **Материалы и методы исследований**

Если показатель  $S_e$  равен нулю, то в почве жидкая фаза (почвенный раствор) отсутствует, а на поверхности твердой фазы (почвенных частиц и агрегатов) сорбируется только гигроскопическая влага; при этом пространство почвенных пор занимает газообразная фаза (воздух, в состав которого может входить и водяной пар). Если показатель  $S_e$  равен единице, то поровое пространство почвы полностью занимает жидкая фаза. Поры почвы могут существенно отличаться по форме и размеру. Насыщение почвы влагой начинается с наименьших пор и заканчивается наиболее крупными порами. Пространство почвенных пор, занятое жидкой фазой (с учетом пленочной влаги), является топологически сомкнутым. Поэтому, с одной стороны, доля порового пространства почвы, занятого жидкой фазой, то есть менисками (манжетами) влаги, тождественно равна эффективному влагонасыщению

почвы  $S_e$ . С другой стороны, эта доля равна накопленной вероятности состояния воды в жидкой фазе почвы. Любая точка на поверхности менисков (манжет) влаги характеризуется одной и той же средней кривизной, которой по закону Лапласа однозначно соответствует определенное значение капиллярного давления. По мере последовательного заполнения пор (начиная с наименьших) влагой средняя кривизна поверхности менисков (манжет) жидкой фазы уменьшается, а величина  $\psi$  повышается. Следовательно, будет справедливым утверждение, что между эффективным влагонасыщением  $S_e$ , равным накопленной вероятности состояния воды в жидкой фазе почвы, с одной стороны, и капиллярным давлением влаги, с другой стороны, имеется однозначное соответствие. Поэтому можно предложить описание такого соответствия в виде функции распределения вероятностей по значениям некоторой случайной величины, определяемой капиллярным давлением влаги  $\psi$ .

Перейдем к вопросу об обоснованном выборе такой случайной величины. Известно, что пространство почвенных пор имеет весьма сложное строение. Это пространство образовано полостями и промежутками между компонентами твердой фазы почвы, которые обычно дифференцированы по гранулометрическому и минералогическому составам. Поэтому почвенные поры могут существенно различаться по размерам и форме. Можно предположить, что поры могут быть классифицированы по некоторому критерию подобия формы. Вполне резонным будет предположение, что для каждого такого (формального) класса распределение пор по размерам является уникальным, причем, возможно, ни одно из этих распределений не подчиняется нормальному закону. Наряду с этим, в качестве следствия центральной предельной теоремы Ляпунова допустимо утверждение: чем больше классов подобия пор в отношении их формы (с разными распределениями) учитывается, тем в большей степени общее распределение пор по размерам соответствует нормальному закону. По этой причине выглядит логичным исходное предположение об использовании именно нормального закона для описания распределения вероятностей по значениям случайной величины, определяемой капиллярным давлением влаги, в виде зависимости  $S_e(\psi)$ .

Для формулирования этой зависимости предлагается рассмотреть явление, имеющее место при вытеснении воды из изначально насыщенной влагой почвы при повышении атмосферного давления. При постепенном возрастании давления сначала происходит растворение воздуха в воде, объем которой сколько-нибудь заметно не увеличивается, а влага остается в почве; однако по причине повышения конкуренции молекул растворенного воздуха и молекул воды за сорбционные центры на поверхности почвенных частиц и агрегатов происходит постепенное ослабление взаимодействия между жидкой и твердой фазами почвы, при этом постепенно увеличивается средняя кривизна поверхности, разделяющей почвенную влагу и воздух, до определенного значения, при котором происходит проникновение воздуха в почву через крупные поры. Это явление называется «вход воздуха» (барботирование) в изначально влагонасыщенную почву. Вход первой порции воздуха в почву сопровождается вытеснением первой порции воды из почвы. Капиллярное давление, при котором начинается вход воздуха в почву и вытеснение воды, далее будем называть «давлением входа воздуха» и обозначать через  $\psi_e$ . (индекс «e» означает «entrance»). Учет рассмотренного явления требует выполнения двух соотношений: во-первых,  $S_e = 1$  при  $\psi \geq \psi_e$ ; во-вторых,  $S_e < 1$  при  $\psi < \psi_e$ . Следовательно, для формулирования зависимости  $S_e(\psi)$  на интервале  $\psi < \psi_e$  представляется целесообразным использовать нормально-распределенную

случайную величину, основанную на разности  $(\psi - \psi_e)$ . Вместе с тем, эта разность на интервале  $\psi < \psi_e$  не изменяет знака: поэтому в таком виде она не может быть принята в качестве нормально-распределенной случайной величины. Поэтому предлагается использовать нормально-распределенную случайную величину  $\ln((\psi - \psi_e)/(\psi_0 - \psi_e))$  с нулевым генеральным средним и дисперсией  $\sigma^2$ . Параметр  $\psi_0$  представляет собой значение капиллярного давления, при котором функция плотности распределения вероятностей по значениям выбранной случайной величины достигает максимума.

В статье [10] для формулирования зависимости  $S_e(\psi)$  в виде функции распределения вероятностей по значениям случайной величины, выбранной описанным выше способом, предлагается соотношение:

$$S_e = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{n\sqrt{\pi}}{4} \ln(-\alpha(\psi - \psi_e))\right), & \psi < \psi_e; \\ 1, & \psi \geq \psi_e, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$  – дополнительная функция ошибок;  $n = 4/(\sigma\sqrt{2\pi})$ ,  $\alpha = -1/(\psi_0 - \psi_e)$  [см  $\text{H}_2\text{O}^{-1}$ ],  $\psi_e$  [см  $\text{H}_2\text{O}$ ],  $\psi_0$  [см  $\text{H}_2\text{O}$ ]  $< \psi_e$  – интерпретированные параметры (с учетом гистерезиса: для ветвей иссушения  $\psi_e \leq 0$ ; для ветвей увлажнения  $\psi_e \geq 0$ ).

Функцию, описываемую соотношением (1), обозначим WRC-КТ (WRC – «water retention capacity»). Функция WRC-КТ в виде частного случая при  $\psi_e = 0$  порождает модель, предложенную Косуги [11, 12], которую обозначим WRC-КТ<sub>0</sub>.

В статье [10] предложена непрерывная аппроксимация соотношения (1) в классе элементарных функций с использованием упрощенной формулы Виницкого [13]:

$$S_e = \begin{cases} \left(1 + (-\alpha(\psi - \psi_e))^n\right)^{-1}, & \psi < \psi_e; \\ 1, & \psi \geq \psi_e. \end{cases} \quad (2)$$

Функцию, описываемую соотношением (2), обозначим WRC-НТ. Функция WRC-НТ в виде частного случая при  $\psi_e = 0$  порождает модель, предложенную Хаверкампом и соавторами [14], которую обозначим WRC-НТ<sub>0</sub>.

Принципиальный результат, полученный в статье [10] в виде аддитивного параметра  $\psi_e$  зависимости  $S_e(\psi)$ , побудил к исследованию этого параметра и его более общей физической интерпретации. Для ветвей иссушения гистерезиса водоудерживающей способности почвы параметр  $\psi_e$  описывает вышеупомянутое «давление входа воздуха», а для ветвей увлажнения данный параметр описывает «давление входа воды».

Соотношения (1) и (2) имеют общий набор из трех параметров:  $\psi_e$  – аддитивный параметр;  $n$  – экспоненциальный параметр;  $\alpha$  – мультипликативный параметр. В соответствии с указанными выше двумя причинами гистерезиса водоудерживающей способности различие в значениях «давления входа воздуха» и «давления входа воды» (наличие тупиковых пор) учитывается с помощью одного параметра (аддитивного), а «эффект четок» учитывается с помощью двух параметров (экспоненциального и мультипликативного). Таким образом, для моделирования ветвей иссушения используется одна тройка значений параметров, а для ветвей увлажнения – другая тройка значений этих же параметров.

К числу наиболее известных в мире аналогов соотношений (1) и (2) относится широко известная эмпирическая модель, предложенная Ван Генухтенем [15]:



$$S_e = \begin{cases} (1 + (-\alpha\psi)^n)^{-(1-1/n)}, & \psi < 0; \\ 1, & \psi \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $n > 1$  и  $\alpha$  [см Н<sub>2</sub>O<sup>-1</sup>] – формальные параметры.

Функцию, описываемую соотношением (3), обозначим WRC-VG. Значительная часть исследований по моделированию гистерезиса  $S_e(\psi)$  является развитием двух известных моделей: первая – модель Скотта и соавторов [16], вторая – модель Кула и Паркера [17]. В основу первой модели положена функция WRC-НТ<sub>0</sub>; в основу второй модели – функция WRC-VG. Модель Скотта и соавторов обозначим Нус-SHT<sub>0</sub>, модель Кула и Паркера – Нус-KPVG. В обеих моделях для расчета сканирующих ветвей гистерезиса  $S_e(\psi)$  используется алгоритм, предложенный Скоттом и соавторами [16].

При описании гистерезиса  $S_e(\psi)$  с применением модели Нус-KPVG существует возможность возникновения нежелательного искусственного (методического) «эффекта помпы», что отмечают авторы данной модели. Указанный эффект заключается в том, что при варьировании величины  $\psi$  в некотором фиксированном диапазоне, величина  $S_e$  может принимать физически абсурдные значения. Кул и Паркер видят проблему в том, что сканирующие ветви гистерезиса, вычисляемые по алгоритму Скотта и соавторов, не образуют замкнутых петель. Однако такой взгляд на проблему является ошибочным. По мнению авторов данной статьи, причиной возможного «эффекта помпы» является то, что в модели Нус-KPVG используется функция WRC-VG. Нетрудно убедиться, что возникновение «эффекта помпы» зависит от значений параметров функции WRC-VG: при одних значениях параметров «эффект помпы» возникает, а при других он отсутствует. Если бы у параметров функции WRC-VG был физический смысл, то можно было бы обоснованно указать границы допустимых значений этих параметров, при которых «эффект помпы» возникнуть не может. Однако для формальных (не имеющих физического смысла) параметров функции WRC-VG таких границ не существует. Поэтому при идентификации параметров функции WRC-VG путем точечной аппроксимации опытных данных могут быть получены значения, при которых, с одной стороны, функция достаточно точно описывает опытные данные, а с другой стороны, возникает нежелательный искусственный (методический) «эффект помпы». Разумеется, в некоторых случаях такой эффект может отсутствовать, но возможность, тем не менее, существует. Кроме того, функция WRC-VG определена на интервале  $\psi \leq 0$ . По этой причине, если главные ветви иссушения и увлажнения петли гистерезиса смыкаются в области положительных значений величины  $\psi$  (в области вытеснения воздуха, заземленного в тупиковых порах, на завершающем этапе влагонасыщения почвы), то функция WRC-VG принципиально не может исчерпывающе полно описать феномен гистерезиса.

Совершенно иначе в отношении описания гистерезиса  $S_e(\psi)$  характеризует себя модель Скотта и соавторов [16] Нус-SHT<sub>0</sub>. Поскольку в основу этой модели положена функция WRC-НТ<sub>0</sub>, параметры которой допускают физическую интерпретацию, постольку для значений этих параметров (хотя бы теоретически) могут быть определены физически допустимые диапазоны. И в таком случае, когда значения параметров не выходят за границы этих диапазонов, модель Нус-SHT<sub>0</sub> не должна проявлять «эффекта помпы». По мнению авторов данной статьи, предотвращение возникновения нежелательного искусственного (методического) «эффекта помпы» может достигаться использованием равных значений значения экспоненциального параметра и для ветвей иссушения, и для ветвей увлажнения. В этом случае учет двух причин гистерезиса будет осуществляться применением двух

соответствующих пар значений аддитивного и мультипликативного параметров для ветвей иссушения и увлажнения.

Наряду с двумя моделями гистерезиса Hys-SHT<sub>0</sub> и Hys-KPVG в данной статье рассматриваются еще три модели. В каждой из этих моделей расчет сканирующих ветвей осуществляется по алгоритму, разработанному Скоттом и соавторами [16], однако при этом используются разные функции водоудерживающей способности почвы. Введем следующие обозначения для этих моделей гистерезиса: Hys-SKT (основана на функции WRC-KT); Hys-SKT<sub>0</sub> (основана на функции WRC-KT<sub>0</sub>); Hys-SHT (основана на функции WRC-HT). Далее для удобства сгруппируем приведенные выше функции  $S_e(\psi)$  и модели гистерезиса  $S_e(\psi)$  в три системы:

- система №1 (WRC-VG, Hys-KPVG);
- система №2 (WRC-KT, Hys-SKT или WRC-KT<sub>0</sub>, Hys-SKT<sub>0</sub> для случая  $\psi_e = 0$ );
- система №3 (WRC-HT, Hys-SHT или WRC-HT<sub>0</sub>, Hys-SHT<sub>0</sub> для случая  $\psi_e = 0$ ).

Для сравнения трех систем используются результаты вычислительного эксперимента. Эти результаты должны ответить на следующие вопросы: во-первых, какая из сравниваемых систем имеет наименьшую погрешность точечной аппроксимации опытных данных о главных ветвях гистерезиса  $S_e(\psi)$  и приводит ли использование аддитивного параметра  $\psi_e$  к уменьшению погрешностей; во-вторых, какая из сравниваемых систем имеет наименьшую погрешность оценок сканирующих ветвей гистерезиса  $S_e(\psi)$ , приводит ли использование параметра  $\psi_e$  к уменьшению погрешностей; в-третьих, устраняется ли нежелательный искусственный (методический) «эффект помпы» при выполнении условия равенства значений экспоненциального параметра  $n$  для ветвей иссушения и увлажнения, оказывает ли это условие влияние на погрешность оценок сканирующих ветвей гистерезиса  $S_e(\psi)$ ? Для получения ответов на эти вопросы далее приводятся результаты вычислительного эксперимента, при выполнении которого:

(i) идентифицированы параметры сравниваемых моделей гистерезиса  $S_e(\psi)$  путем точечной аппроксимации данных о главных ветвях иссушения и увлажнения водоудерживающей способности почвы (для идентификации параметров использованы литературные данные о пылеватом суглинке «3301 *Cariol silt loam*» [8]);

(ii) осуществлено оценивание сканирующих ветвей гистерезиса  $S_e(\psi)$  с использованием сравниваемых систем, вычислены погрешности оценок, выявление различий между погрешностями выполнено по критерию Вильямса-Клута [9];

(iii) проведены расчеты сканирующих ветвей гистерезиса при осцилляции капиллярного давления влаги в заданном диапазоне значений, применив параметры, которые идентифицированы по данным о главных ветвях иссушения и увлажнения водоудерживающей способности почвы с использованием, во-первых, условия  $n_d \neq n_w$ , во-вторых, с использованием условия  $n_d = n_w$ .

#### Результаты и их обсуждение

Таблица 1 содержит параметры, идентифицированные путем точечной аппроксимации опытных данных о главных ветвях иссушения и увлажнения водоудерживающей способности почвы «3301 *Cariol silt loam*». В обозначениях используются два дополнительных нижних индекса: «*d*» – для ветвей иссушения и «*w*» – для ветвей увлажнения. Для варианта вычислительного эксперимента  $n_d \neq n_w$  приведены параметры, рассчитанные с применением разработанной авторами компьютерной программы SoilHysteresis-v.1.0 [18]. Для варианта  $n_d = n_w$  приведены параметры из статьи [4]. С использованием этих параметров выполнен вычислительный эксперимент по исследованию влияния равенства значений экспоненциального параметра  $n$  для ветвей иссушения и увлажнения гистерезиса на предотвращение «эффекта помпы».

**Таблица 1 – Параметры трех систем гидрофизических функций почвы**

Сис- темы функ- ций	$n_d \neq n_w$									
	$\theta_r$	$\theta_s$	$\psi_{e,d}$	$\psi_{0,d}$	$\alpha_d$	$\psi_{e,w}$	$\psi_{0,w}$	$\alpha_w$	$n_d$	$n_w$
№1	0,3076	0,4415	-	-109,35	0,0091	-	-26,67	0,0375	2,909	2,042
№2	0,3143	0,4415	-1,78	-131,89	0,0077	10,69	-43,67	0,0184	2,765	1,699
№3	0,3111	0,4415	-1,23	-135,69	0,0074	8,16	-46,44	0,0183	2,726	1,671
№2 $\psi_e=0$	0,3130	0,4415	-	-133,48	0,0075	-	-44,20	0,0226	2,687	1,583
№3 $\psi_e=0$	0,3131	0,4415	-	-133,57	0,0075	-	-42,44	0,0236	2,866	1,571
$n_d = n_w$										
№1	0,3158	0,4415	-	-97,84	0,0102	-	-34,32	0,0291	2,776	2,776
№2	0,3180	0,4415	0	-127,81	0,0078	35,90	-45,14	0,0123	2,792	2,792
№3	0,3167	0,4415	0	-129,11	0,0078	36,26	-45,65	0,0122	2,890	2,890
№2 $\psi_e=0$	0,3193	0,4415	-	-122,34	0,0082	-	-43,34	0,0231	2,284	2,284
№3 $\psi_e=0$	0,3179	0,4415	-	-124,12	0,0081	-	-43,95	0,0228	2,354	2,354

Погрешности трех систем гидрофизических функций в отношении точечной аппроксимации опытных данных о главных ветвях гистерезиса водоудерживающей способности почвы, а также в отношении оценок сканирующих ветвей гистерезиса  $S_e(\psi)$  для двух вариантов вычислительного эксперимента ( $n_d \neq n_w$  и  $n_d = n_w$ ) приведены в таблице 2.

**Таблица 2 – Величина ошибки по вариантам вычислительного эксперимента (корень квадратный из среднего арифметического квадратов отклонений результатов моделирования от опытных данных, RMSE – root mean square error)**

Варианты вычислительного эксперимента	$n_d \neq n_w$					$n_d = n_w$				
	Системы гидрофизических функций почвы									
	№1	№2	№3	№2 $\psi_e=0$	№3 $\psi_e=0$	№1	№2	№3	№2 $\psi_e=0$	№3 $\psi_e=0$
Главные: идентификация по 72 точкам	0,0025	0,0021	0,0021	0,0029	0,0022	0,0067	0,0036	0,0036	0,0068	0,0066
Сканирующие увлажнения: оценка для 56 точек	0,0073	0,0069	0,0063	0,0067	0,0079	0,0080	0,0058	0,0062	0,0078	0,0077
Сканирующие иссушения: оценка для 85 точек	0,0074	0,0059	0,0059	0,0069	0,0067	0,0054	0,0048	0,0050	0,0049	0,0047



Результаты выявления различий между погрешностями сравниваемых трех систем гидрофизических функций в отношении точечной аппроксимации опытных данных о главных ветвях гистерезиса водоудерживающей способности почвы для двух вариантов вычислительного эксперимента ( $n_d \neq n_w$  и  $n_d = n_w$ ) приведены в таблица 3.

**Таблица 3 – Сравнение погрешностей трех систем в отношении точечной аппроксимации опытных данных о главных ветвях гистерезиса водоудерживающей способности почвы по критерию Вильямса-Клута для доверительных вероятностей 0,95 и 0,975**

$y - (y_1 + y_2)/2 = \lambda(y_1 - y_2)$ , где $y$ – опытные данные											
$n_d \neq n_w$											
$y_1$ : HYS-VG, $y_2$ : HYS-KT			$y_1$ : HYS-VG, $y_2$ : HYS-HT			$y_1$ : HYS-KT, $y_2$ : HYS-HT					
$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$
-0,112	0,133	0,159	-0,149	0,153	0,183	-0,116	0,569	0,681			
$y_1$ и $y_2$ не различаются			$y_1$ и $y_2$ не различаются			$y_1$ и $y_2$ не различаются					
$y_1$ : HYS-VG, $y_2$ : HYS-KT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-VG, $y_2$ : HYS-HT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-KT <sub>0</sub> , $y_2$ : HYS-HT <sub>0</sub>					
$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$
0,463	0,354	0,424	-0,361	0,309	0,369	-0,895	0,313	0,374			
$y_1$ точнее, чем $y_2$			$y_2$ точнее, чем $y_1$ (0,95)			$y_2$ точнее, чем $y_1$					
$y_1$ : HYS-KT, $y_2$ : HYS-KT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-HT, $y_2$ : HYS-HT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-KT, $y_2$ : HYS-HT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-HT, $y_2$ : HYS-KT <sub>0</sub>		
$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$
0,258	0,154	0,184	0,057	0,203	0,242	0,033	0,182	0,218	0,350	0,179	0,215
$y_1$ точнее, чем $y_2$			$y_1$ и $y_2$ не различаются			$y_1$ и $y_2$ не различаются			$y_1$ точнее, чем $y_2$		
$n_d = n_w$											
$y_1$ : HYS-VG, $y_2$ : HYS-KT			$y_1$ : HYS-VG, $y_2$ : HYS-HT			$y_1$ : HYS-KT, $y_2$ : HYS-HT					
$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$
-0,485	0,124	0,149	-0,485	0,124	0,149	-0,485	0,124	0,149			
$y_2$ точнее, чем $y_1$			$y_2$ точнее, чем $y_1$			$y_1$ и $y_2$ не различаются					
$y_1$ : HYS-VG, $y_2$ : HYS-KT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-VG, $y_2$ : HYS-HT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-KT <sub>0</sub> , $y_2$ : HYS-HT <sub>0</sub>					
$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$
0,747	1,397	1,672	0,747	1,397	1,672	0,747	1,397	1,672			
$y_1$ и $y_2$ не различаются			$y_1$ и $y_2$ не различаются			$y_2$ точнее, чем $y_1$					
$y_1$ : HYS-KT, $y_2$ : HYS-KT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-HT, $y_2$ : HYS-HT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-KT, $y_2$ : HYS-HT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-HT, $y_2$ : HYS-KT <sub>0</sub>		
$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$
0,511	0,125	0,500	0,129	0,500	0,129	0,500	0,129	0,150	0,511	0,125	0,149
$y_1$ точнее, чем $y_2$			$y_1$ точнее, чем $y_2$			$y_1$ точнее, чем $y_2$			$y_1$ точнее, чем $y_2$		

Результаты выявления различий между погрешностями сравниваемых трех систем гидрофизических функций в отношении оценок сканирующих ветвей

гистерезиса водоудерживающей способности почвы для двух вариантов вычислительного эксперимента ( $n_d \neq n_w$  и  $n_d = n_w$ ) приведены в таблице 4.

**Таблица 4 – Сравнение погрешностей трех систем в отношении оценок сканирующих ветвей гистерезиса водоудерживающей способности почвы по критерию Вильямса-Клута для доверительных вероятностей 0,95 и 0,975**

$y - (y_1 + y_2)/2 = \lambda(y_1 - y_2)$ , где $y$ – опытные данные											
$n_d \neq n_w$											
$y_1$ : HYS-VG, $y_2$ : HYS-KT			$y_1$ : HYS-VG, $y_2$ : HYS-HT			$y_1$ : HYS-KT, $y_2$ : HYS-HT					
$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$
-0,940	0,274	0,328	-0,965	0,260	0,310	0,179	0,964	1,151			
$y_2$ точнее, чем $y_1$			$y_2$ точнее, чем $y_1$			$y_1$ и $y_2$ не различаются					
$y_1$ : HYS-VG, $y_2$ : HYS-KT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-VG, $y_2$ : HYS-HT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-KT <sub>0</sub> , $y_2$ : HYS-HT <sub>0</sub>					
$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$
-0,496	0,825	0,985	-0,451	0,643	0,768	-0,344	0,882	1,054			
$y_1$ и $y_2$ не различаются			$y_1$ и $y_2$ не различаются			$y_1$ и $y_2$ не различаются					
$y_1$ : HYS-KT, $y_2$ : HYS-KT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-HT, $y_2$ : HYS-HT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-KT, $y_2$ : HYS-HT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-HT, $y_2$ : HYS-KT <sub>0</sub>		
$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$
0,983	0,307	0,366	1,329	0,317	0,379	1,324	0,347	0,414	1,069	0,300	0,358
$y_1$ точнее, чем $y_2$			$y_1$ точнее, чем $y_2$			$y_1$ точнее, чем $y_2$			$y_1$ точнее, чем $y_2$		
$n_d = n_w$											
$y_1$ : HYS-VG, $y_2$ : HYS-KT			$y_1$ : HYS-VG, $y_2$ : HYS-HT			$y_1$ : HYS-KT, $y_2$ : HYS-HT					
$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$
-0,521	0,148	0,177	-0,459	0,148	0,176	1,996	1,167	1,394			
$y_2$ точнее, чем $y_1$			$y_2$ точнее, чем $y_1$			$y_1$ точнее, чем $y_2$					
$y_1$ : HYS-VG, $y_2$ : HYS-KT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-VG, $y_2$ : HYS-HT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-KT <sub>0</sub> , $y_2$ : HYS-HT <sub>0</sub>					
$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$
-1,816	0,839	1,002	-2,824	0,807	0,964	-1,849	1,267	1,513			
$y_2$ точнее, чем $y_1$			$y_2$ точнее, чем $y_1$			$y_2$ точнее, чем $y_1$					
$y_1$ : HYS-KT, $y_2$ : HYS-KT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-HT, $y_2$ : HYS-HT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-KT, $y_2$ : HYS-HT <sub>0</sub>			$y_1$ : HYS-HT, $y_2$ : HYS-KT <sub>0</sub>		
$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$
0,504	0,157	0,187	0,450	0,164	0,196	0,517	0,166	0,198	0,431	0,153	0,183
$y_1$ точнее, чем $y_2$			$y_1$ точнее, чем $y_2$			$y_1$ точнее, чем $y_2$			$y_1$ точнее, чем $y_2$		

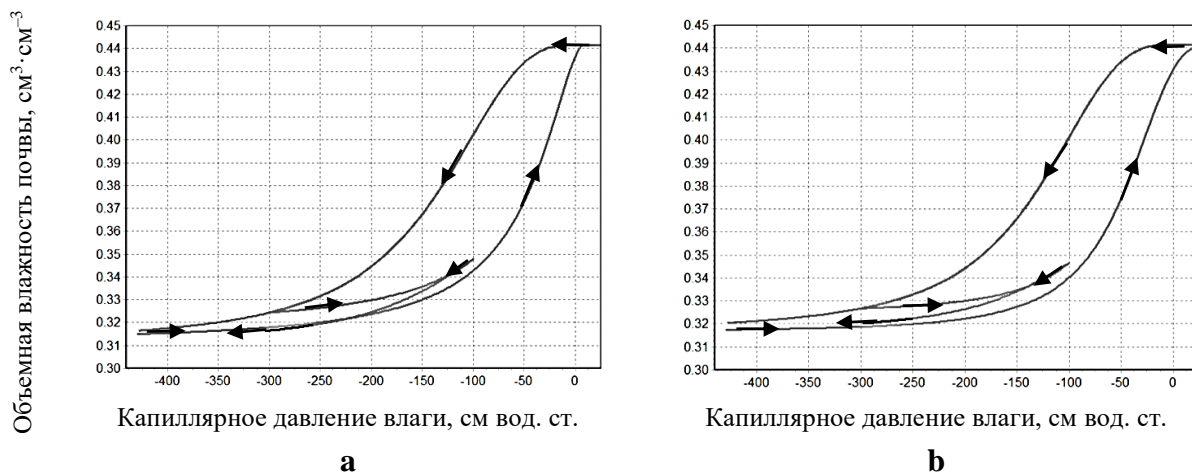
Результаты выявления различий между погрешностями двух вариантов вычислительного эксперимента ( $n_d \neq n_w$  и  $n_d = n_w$ ) в отношении точечной аппроксимации опытных данных о водоудерживающей способности почвы и оценок сканирующих ветвей гистерезиса  $S_e(\psi)$  для каждой системы приведены в таблице 5.

**Таблица 5 – Сравнение погрешностей точечной аппроксимации опытных данных о водоудерживающей способности почвы и оценок сканирующих ветвей для двух вариантов вычислительного эксперимента с параметрами  $n_d \neq n_w$  и  $n_d = n_w$  с использованием критерия Вильямса-Клута**

Ветви гистерезиса	$y - (y_1 + y_2)/2 = \lambda(y_1 - y_2)$ , где $y$ – опытные данные; $y_1: n_d \neq n_w, y_2: n_d = n_w$														
	Системы гидрофизических функций почвы														
	№1			№2			№3			№2 $\psi_e=0$			№3 $\psi_e=0$		
Главные: идентификация по 72 точкам	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$
	0,995	0,059	0,071	1,167	0,186	0,222	1,114	0,183	0,219	0,742	0,104	0,124	0,716	0,073	0,087
	$y_1$ точнее, чем $y_2$			$y_1$ точнее, чем $y_2$			$y_1$ точнее, чем $y_2$			$y_1$ точнее, чем $y_2$			$y_1$ точнее, чем $y_2$		
Сканирующие увлажнения: оценки для 56 точек	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$
	0,676	0,436	0,523	-1,533	0,778	0,932	-0,861	1,116	1,337	0,573	0,359	0,430	0,251	0,348	0,417
	$y_1$ точнее, чем $y_2$			$y_2$ точнее, чем $y_1$			$y_1$ и $y_2$ не различаются			$y_1$ точнее, чем $y_2$			$y_1$ и $y_2$ не различаются		
Сканирующие иссушения: оценки для 85 точек	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$
	-0,529	0,289	0,345	-0,363	0,420	0,502	-0,329	0,366	0,438	-0,621	0,238	0,285	-0,471	0,235	0,281
	$y_2$ точнее, чем $y_1$			$y_1$ и $y_2$ не различаются			$y_1$ и $y_2$ не различаются			$y_2$ точнее, чем $y_1$			$y_2$ точнее, чем $y_1$		
Все сканирующие: оценки для 141 точек	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$	$\lambda$	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,975}$
	0,046	0,254	0,303	-0,610	0,377	0,450	-0,358	0,357	0,427	-0,033	0,212	0,253	-0,052	0,202	0,242
	$y_1$ и $y_2$ не различаются			$y_2$ точнее, чем $y_1$			$y_2$ точнее, чем $y_1$ (0,95)			$y_1$ и $y_2$ не различаются			$y_1$ и $y_2$ не различаются		

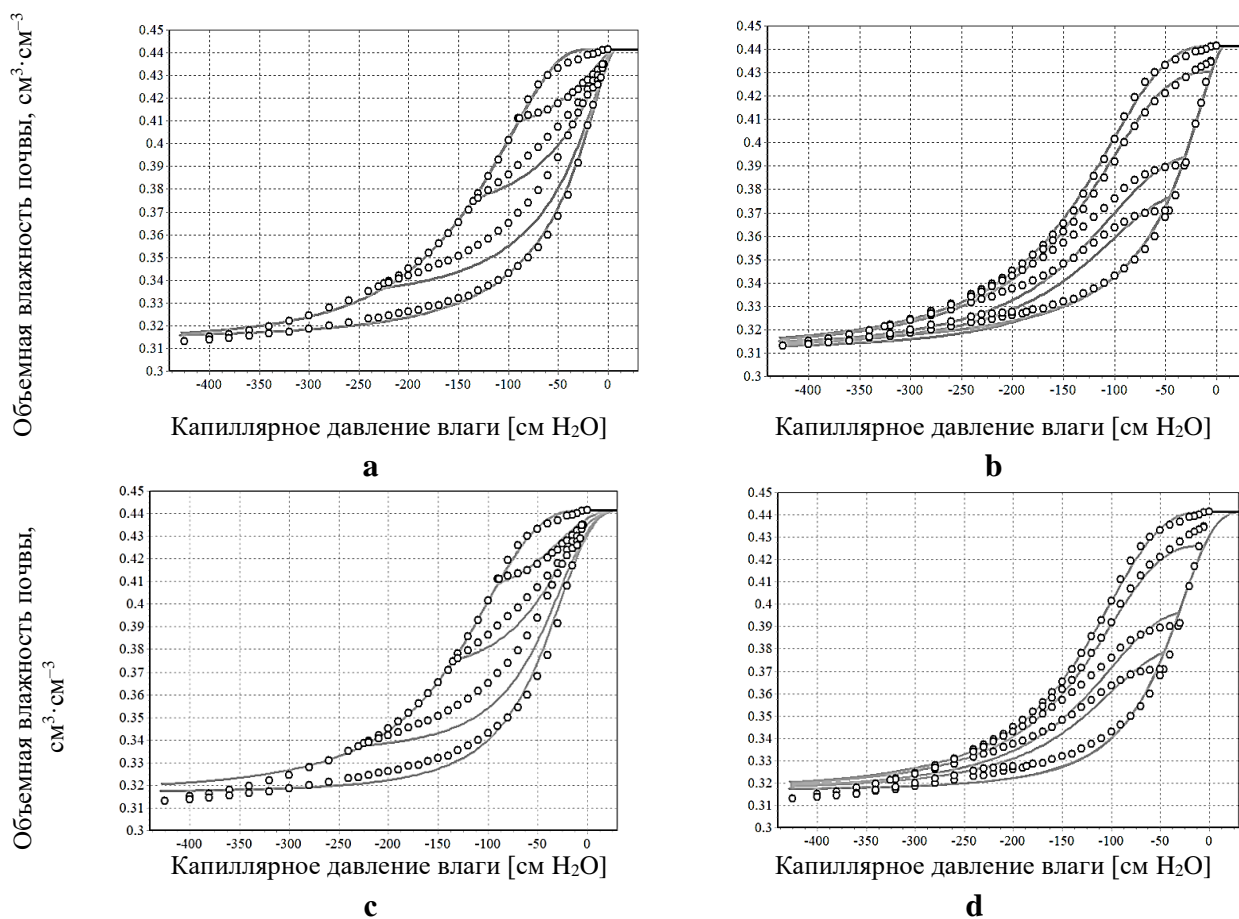
Если различие между погрешностями оценок сканирующих ветвей гистерезиса  $S_e(\psi)$  в двух вариантах вычислительного эксперимента ( $n_d \neq n_w$  и  $n_d = n_w$ ) является несущественным, то условие  $n_d = n_w$ , устраняющее нежелательный «эффект помпы», можно признать эффективным. В качестве примера, иллюстрирующего «эффект помпы» и его устранение, на рисунке 1a,b приведены результаты вычислительного эксперимента с моделью Hys-SHT. Стрелками на рисунке 1a,b изображены сценарии варьирования величины  $\psi$ . На рисунке 1a видно, что в диапазоне пониженной влажности сканирующая ветвь иссушения пересекает главную ветвь увлажнения гистерезиса водоудерживающей способности почвы при  $n_d \neq n_w$ . Использование параметров, идентифицированных при условии  $n_d = n_w$ , приводит к предотвращению отмеченного пересечения главной ветви увлажнения и, следовательно, к устранению нежелательного «эффекта помпы», что подтверждает рисунок 1b.

На рисунке 2 a, b, c, d приведены результаты двух вариантов вычислительного эксперимента с моделью Hys-SHT по точечной аппроксимации главных ветвей и оцениванию сканирующих ветвей гистерезиса  $S_e(\psi)$ .



**Рисунок 1 – Наличие (а) или отсутствие (б) «эффекта помпы» модели Нус-SHT**

*Примечание. 1 а – наличие, при  $n_d \neq n_w$ . 1 б – отсутствие, при  $n_d = n_w$ .*



**Рисунок 2 – Точечная аппроксимация данных о главных ветвях с оценкой трех (а, с) сканирующих ветвей увлажнения и четырех (б, d) иссушения с использованием модели Нус-SHT**

*Примечание. а –  $n_d \neq n_w$ ; б –  $n_d \neq n_w$ ; с –  $n_d = n_w$ ; d –  $n_d = n_w$ .*

### Выводы

Из анализа результатов исследования вытекают следующие выводы:

1. В отношении погрешностей точечной аппроксимации опытных данных о главных ветвях гистерезиса водоудерживающей способности почвы:
  - в варианте  $n_d \neq n_w$  в большинстве сравнений различия между тремя системами не являются существенными, достоверные различия при использовании аддитивного параметра  $\psi_e$  в половине сравнений не выявлены, из остальных сравнений видно, что использование аддитивного параметра  $\psi_e$  способствует существенному уменьшению погрешности;
  - в варианте  $n_d = n_w$  система № 1 достоверно уступает системам № 2 и № 3 в случае использования в них аддитивного параметра  $\psi_e$ , (но при этом между системами № 2 и № 3 нет существенных различий), система № 1 достоверно не отличается от систем № 2 и № 3 в случае отсутствия в них аддитивного параметра  $\psi_e$  (но при этом система № 3 достоверно точнее системы № 2), использование аддитивного параметра  $\psi_e$  существенно уменьшает погрешность.
2. В отношении погрешностей оценок сканирующих ветвей гистерезиса  $S_e(\psi)$ :
  - в варианте  $n_d \neq n_w$  система №1 достоверно уступает системам № 2 и № 3 в случае использования в них аддитивного параметра  $\psi_e$ , (при этом между системами № 2 и № 3 нет существенных различий), между тремя сравниваемыми системами нет достоверных различий в случае отсутствия в системах № 2 и № 3 аддитивного параметра  $\psi_e$ , использование аддитивного параметра  $\psi_e$  способствует существенному уменьшению погрешности;
  - в варианте  $n_d = n_w$  система № 1 достоверно уступает системам № 2 и № 3 в случае использования в них аддитивного параметра  $\psi_e$ , (но система № 2 достоверно точнее системы № 3), вместе с тем, система 1 достоверно уступает системам № 2 и № 3 и в случае отсутствия в них аддитивного параметра  $\psi_e$ , (но система № 3 достоверно точнее системы № 2), использование аддитивного параметра  $\psi_e$  способствует существенному уменьшению погрешности.
3. Нежелательный искусственный (методический) «эффект помпы» устраняется при выполнении условия равенства значений экспоненциального параметра  $n$  для ветвей иссушения и увлажнения, при этом различие между погрешностями оценок сканирующих ветвей гистерезиса  $S_e(\psi)$  в двух вариантах вычислительного эксперимента ( $n_d \neq n_w$  и  $n_d = n_w$ ) является несущественным. Следовательно, условие  $n_d = n_w$ , устраняющее «эффект помпы» можно признать эффективным.
4. В отношении пылеватого суглинка для решения проблем точного земледелия, таких как расчет прецизионных норм орошения, применение гидрофизических функций систем № 2 и № 3 представляется более предпочтительным по сравнению с функциями системы № 1.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 19-04-00939-а, № 19-016-00148-а.*

### Литература

1. Huang H. C., Tan Y. C., Chen C. H. A novel hysteresis model in unsaturated soil // Hydrological Processes. 2005. Vol. 19. P. 1653-1665.
2. Degtyareva O., Degtyarev G., Togo I., Terleev V., Nikonorov A., Volkova Yu. Analysis of stress-strain state rainfall runoff control system – buttress dam // Procedia Engineering. 2016. Vol. 165. P. 1619–1628.



3. Nikonorov A., Terleev V., Pavlov S., Togo I., Volkova Yu., Makarova T., Garmanov V., Shishov D., Mirschel W. Applying the model of soil hydrophysical properties for arrangements of temporary enclosing structures // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 165. P. 1741–1747.
4. Terleev V., Nikonorov A., Ginevsky R., Lazarev V., Topaj A., Dunaieva I., Terleeva A. Estimation of precise irrigation rates taking into account the hysteresis of soil water-retention capacity // *IOP Conference. Series “Earth and Environmental Science”*. 2019. Vol. 403. Art. No. 012239. DOI: 10.1088/1755-1315/403/1/012239.
5. Костяков А. Н. Основы мелиорации. М.: Сельхозгиз, 1960. 621 с.
6. Воронин А. Д. Основы физики почв. М.: МГУ, 1986. 244 с.
7. Terleev V., Nikonorov A., Togo I., Volkova Yu., Garmanov V., Shishov D., Pavlova V., Semenova N., Mirschel W. Modelling the hysteretic water retention capacity of soil for reclamation research as a part of underground development // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 165. P. 1776–1783.
8. Mualem Y. A catalogue of the hydraulic properties of unsaturated soils. Research Project 442. Israel, Haifa: Technion, Israel Institute of Technology, 1976. 100 p.
9. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: Физматлит, 2006. 816 с.
10. Терлеев В. В. Миршель В., Баденко В. Л., Гусева И. Ю. Усовершенствованный метод Муалема-Ван Генухтена и его верификация на примере глинистой почвы Бейт Нетофа // *Почвоведение*. 2017. № 4. С. 457–467.
11. Kosugi K. Three-parameter lognormal distribution model for soil water retention // *Water Resour. Res.* 1994. Vol. 30. P. 891–901.
12. Kosugi K. Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties // *Water Resour. Res.* 1996. Vol. 32. P. 2697–2703.
13. Winitzki S. A handy approximation for the error function and its inverse. [Electronic resource]. Access point: <https://sites.google.com/site/winitzki/sergei-winitzkis-files/erf-approx.pdf?attredirects=0> (reference's date 01.08.2020).
14. Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., Wierenga P.J., Vachaud G. A comparison of numerical simulation model for one-dimensional infiltration // *Soil Sci. Soc. Am. J.* 1977. Vol. 41. P. 285–294.
15. Van Genuchten M. T. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // *Soil Sci. Soc. Am. J.* 1980. Vol. 44. P. 892–989.
16. Scott P. S., Farquhar G. J., Kouwen N. Hysteretic effects on net infiltration // *Proceeding of National conference on advances in infiltration*. American Society of Agricultural Engineers, St. Joseph, Michigan, 1983. P. 163–170.
17. Kool J. B., Parker J. C. Development and evaluation of closed-form expressions for hysteretic soil hydraulic properties // *Water Resources Research*. 1987. Vol. 23(1). P. 105–114.
18. Гиневский Р. С., Терлеев В. В., Топаж А. Г., Лазарев В. А. SoilHysteresis-v.1.0. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019666861, 16.12.2019. Заявка № 2019662560 от 12.10.2019.

## References

1. Huang H. C., Tan Y. C., Chen C. H. A novel hysteresis model in unsaturated soil // *Hydrological Processes*. 2005. Vol. 19. P. 1653–1665.
2. Degtyareva O., Degtyarev G., Togo I., Terleev V., Nikonorov A., Volkova Yu. Analysis of stress-strain state rainfall runoff control system – buttress dam // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 165. P. 1619–1628.
3. Nikonorov A., Terleev V., Pavlov S., Togo I., Volkova Yu., Makarova T., Garmanov V., Shishov D., Mirschel W. Applying the model of soil hydrophysical properties for arrangements of temporary enclosing structures // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 165. P. 1741–1747.
4. Terleev V., Nikonorov A., Ginevsky R., Lazarev V., Topaj A., Dunaieva I., Terleeva A. Estimation of precise irrigation rates taking into account the hysteresis of soil water-retention capacity // *IOP Conference Series “Earth and Environmental Science”*. 2019. Vol. 403. Art. No. 012239. DOI:10.1088/1755-1315/403/1/012239.
5. Kostyakov A. N. Basics of reclamation. Moscow: Selkhozgiz, 1960. 621 p.
6. Voronin A. D. Fundamentals of soil physics. Moscow: MSU, 1986. 244 p.
7. Terleev V., Nikonorov A., Togo I., Volkova Yu., Garmanov V., Shishov D., Pavlova V., Semenova N., Mirschel W. Modelling the hysteretic water retention capacity of soil for reclamation research as a part of underground development // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 165. P. 1776–1783.
8. Mualem Y. A catalogue of the hydraulic properties of unsaturated soils. Research Project 442. Israel, Haifa: Technion, Israel Institute of Technology, 1976. 100 p.
9. Kobzar A. I. Applied mathematical statistics. For engineers and scientists. Moscow: Fizmatlit, 2006. 816 p.

10. Terleev V. V., Mirshel V., Badenko V. L., Guseva I. Yu. An improved Mualem-Van Genuchten method and its verification using data on Beit Netofa clay // Pochvovedenie. 2017. No. 4. P. 457–467.
11. Kosugi K. Three-parameter lognormal distribution model for soil water retention // Water Resour. Res. 1994. Vol. 30. P. 891–901.
12. Kosugi K. Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties // Water Resour. Res. 1996. Vol. 32. P. 2697–2703.
19. Winitzki S. A handy approximation for the error function and its inverse [Electronic resource]. Access point: <https://sites.google.com/site/winitzki/sergei-winitzkis-files/erf-approx.pdf?attredirects=0> (reference's date 01.08.2020).
13. Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., Wierenga P.J., Vachaud G. A comparison of numerical simulation model for one-dimensional infiltration // Soil Sci. Soc. Am. J. 1977. Vol. 41. P. 285–294.
14. Van Genuchten M. T. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil Sci. Soc. Am. J. 1980. Vol. 44. P. 892–989.
17. Scott P. S., Farquhar G. J., Kouwen N. Hysteretic effects on net infiltration // Proceeding of National Conference on Advances in Infiltration. American Society of Agricultural Engineers, St. Joseph, Michigan, 1983. P. 163–170.
15. Kool J. B., Parker J. C. Development and evaluation of closed-form expressions for hysteretic soil hydraulic properties // Water Resources Research. 1987. Vol. 23(1). P. 105–114.
16. Ginevsky R. S., Terleev V. V., Topazh A. G., Lazarev V. A. SoilHysteresis-v.1.0. Certificate of registration of a computer program RU 2019666861, December 16, 2019. Application No. 2019662560 dated 12.10.2019.

UDC 631.43+004.65

Terleev V. V., Dunaieva Ie. A., Ginevsky R. S., Lazarev V. A., Topazh A. G.

**HYSTERESIS OF SOIL WATER-RETENTION CAPACITY:  
COMPARISON OF MODELS ON THE EXAMPLE OF SILT LOAM**

**Summary.** *The importance of the study is determined by the theoretical and practical value of the models of hysteresis of soil water-retention capacity as the intellectual core of precision irrigation farming technologies. The aim of the research is the physical justification of the hysteresis of soil water-retention capacity as a capillary-porous medium; description of this phenomenon using the method of mathematical modeling and verification of the proposed description in comparison with the world's most famous analogues. This aim is achieved by solving the following problems: theoretical justification and description of the soil water-retention capacity taking into account hysteresis in the form of three systems of hydrophysical functions; comparing these systems based on the errors in the estimates of scanning hysteresis branches using parameters identified by point-approximation of the literature data on the main drying and wetting branches of the water retention capacity for “3301 Carieol silt loam” using the Williams-Kloot criterion; investigation of the condition for the equality of the exponential parameters  $n_d = n_w$ , for the drying and wetting branches, eliminating the undesirable artificial “pump effect”, as well as the use of the additive parameter  $\psi_e$  concerning the influence on the estimation errors. During the study, the SoilHysteresis-V.1.0 computer program is used. For silt loam, the condition  $n_d = n_w$  is effective. The use of the additive parameter  $\psi_e$  leads to a significant decrease in the errors of the point-approximation of the data on the main branches and the errors in the estimates of the scanning branches of the hysteresis of water retention capacity. To solve such problems of precision irrigation farming as the calculation of precise irrigation rates, the use of hydrophysical functions of systems No. 2 and No. 3 seems to be more preferable compared to the functions of system No. 1.*

**Keywords:** *mathematical model, main and scanning branches of hysteresis, point-approximation of experimental data, estimation, “pump effect”.*

Терлеев Виталий Викторович, доктор сельскохозяйственных наук, профессор, профессор ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»; 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29; e-mail: Vitaly\_Terleev@mail.ru.

Дунаева Елизавета Андреевна, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник отдела цифрового мониторинга и моделирования агроэкосистем ФГБУН «Научно исследовательский институт сельского хозяйства Крыма»; 295493, Россия, Республика Крым, г. Симферополь, ул. Киевская, 150; e-mail: dunaeva\_e@niishk.ru.

Гиневский Роман Сергеевич, студент магистратуры ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»; 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29; e-mail: rginevski@gmail.com.

Лазарев Виктор Андреевич, студент магистратуры ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»; 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29; e-mail: lviktor.97@mail.ru.

Топаж Александр Григорьевич, доктор технических наук, ведущий научных сотрудник, ООО «Бюро Гиперборея»; 193312, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Подвойского, 40-2; e-mail: alex.topaj@gmail.com.

Terleev Vitaly Viktorovich, Dr. Sc. (Agr.), Professor, Professor of Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University; 29, Polytekhnikeskaya str., Saint-Petersburg, 195251, Russia; e-mail: Vitaly\_Terleev@mail.ru.

Dunaieva Ielizaveta Andreevna, Cand. Sc. (Techn.), leading researcher of digital monitoring and agroecosystem modeling Department, FSBSI “Research Institute of Agriculture of Crimea”; 150, Kievskaya str., Simferopol, Republic of Crimea, 295493, Russia; e-mail: dunaeva\_e@niishk.ru.

Ginevsky Roman Sergeevich, undergraduate student of Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University; 29, Polytekhnikeskaya str., Saint-Petersburg, 195251, Russia; e-mail: rginevski@gmail.com.

Lazarev Viktor Andreevich, undergraduate student of Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University; 29, Polytekhnikeskaya str., Saint-Petersburg, 195251, Russia; e-mail: lviktor.97@mail.ru.

Topazh Aleksandr Grigorievich, Dr. Sc. (Techn.), leading researcher, LLC “Bureau Hyperborea”, 40-2, Podvoisky str., Saint-Petersburg, 193312, Russia; e-mail: alex.topaj@gmail.com.

*Дата поступления в редакцию – 20.01.2020.*

*Дата принятия к печати – 01.03.2020.*